JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 26, 233–250 (1979)

Tabloïdes

SERGE HOCQUENGHEM

Département de Mathématiques, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, 75003 Paris, France

Communicated by the Editors

Received March 24, 1975

A tabloïde is composed of two finite sets, E (the set of the rows) and F (the set of the columns), and of a function $f : \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F) \to \mathbb{N}$, which is a Whitney's rank in its two variables. There are tabloids associated to matrices, to bipartite graphs and to ordinary graphs respectively in relation to linear rank, matchings and gammoids. Some of the properties of matrices can be generalized to tabloids (transposition, direct sum, inverse, product...). The properties of bipartite graphs which consists in "transmission" of matroids by matchings is used to define a class of tabloids (which strictly contains those which are associated to matrices). Finally, the problem of the representation of a tabloid on a field is studied.

INTRODUCTION

La notion de matroïde fut découverte en 1935 par Whitney [13]: Elle est l'abstraction de la notion d'indépendance linéaire, telle qu'elle se présente dans un ensemble fini d'éléments d'un espace vectoriel. Le nom même de "matroïde" provient de ce qu'un tel ensemble peut toujours être considéré comme l'ensemble des lignes (ou des colonnes) d'une matrice à éléments dans un corps. En 1965, Edmonds et Fulkerson [4] remarquèrent que les matroïdes se rencontrent naturellement dans les relation binaires (graphes bipartis), ce qui conduisit à étudier les notions de "matroïde transversal", puis en généralisant, celle de "gammoïde" (Perfect [9] et Pym [10] et aux relations entre les deux (Ingleton et Piff [5])).

En même temps, le problème de la représentation d'un matroïde comme sous-ensemble d'un espace vectoriel était étudié par Mirsky et Perfect [8] pour le cas du matroïde transversal, par Mason [7] pour le cas du gammoïde et Vamos [11] dans le cas général, ainsi que White [12] à l'aide des algèbres de crochets.

Le présent travail consiste à généraliser, non plus la notion de sous-ensemble d'un espace vectoriel, mais cette fois celle de matrice à éléments dans un corps commutatif. L'étude de Whitney concernait l'ensemble des lignes, ou celui des colonnes d'une matrice, tandis qu'ici nous considérerons

0095-8956/79/020233-18$02.00/0

582b/26/2-8

les deux ensembles simultanément. Ceci conduit à la notion de "tabloïde" (le terme est destiné à évoquer le tableau que constitue une matrice) et à celle de rang dans un tabloïde qui généralise celle de rang dans une matrice.

Nous nous sommes intéressés aux propriétés de ces objets (sans en faire une liste exhaustive, car il y en a beaucoup, découlant, comme pour les matroïdes, plus ou moins immédiatement de la définition) à leur présence naturelle dans les notions de matroïde transversal et de gammoïde et à leur représentation matricielle sur un anneau et sur un corps commutatif.

1. Terminologie et Notations

Tous les ensembles considérés dans ce travail seront finis. On notera $|E|$ le cardinal d'un ensemble E et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Si X et X' sont des ensembles, $X - X'$ désignera l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à X'. Nous confondrons, pour la simplicité de l'écriture, tout ensemble à un élément et cet élément: nous écrirons donc x pour $\{x\}$, $X - x$ pour $X - \{x\}$ et même $X + x$ pour $X \cup \{x\}$.

Tous les anneaux et corps intervenant sont supposés commutatifs.

MATROIDES. Un *matroïde* sur un ensemble E est un ensemble $\mathscr{M}$ non vide de sous-ensembles de E vérifiant les deux axiomes suivants:

(L_1) si $X \in \mathscr{M}$ et $X' \subset X$, alors $X' \in \mathscr{M}$.

(L_2) si X et $X' \in \mathscr{M}$ avec $|X'| = |X| + 1$, alors il existe $x' \in X' - X$ tel que $X + x' \in \mathscr{M}$.

Si $X \in \mathscr{M}$, on dit que X est *indépendant*, sinon il est dit *dépendant*.

Une *base* est un ensemble indépendant maximal, un *stigme* un ensemble dépendant minimal.

On peut aussi définir un matroïde par sa fonction *rang*:

$$r\colon\ \mathscr{P}(E) \to N \quad \text{en posant} \quad r(X) = \max\{|X_0|;\ X_0 \subset X \text{ et } X_0 \in \mathscr{M}\}$$

On a alors

$$X \in \mathscr{M} \Leftrightarrow r(X) = |X|$$

On montre que les axiomes (L_1) et (L_2) sont équivalents aux axiomes suivants, portant sur la fonction r et définissant un rang:

(R_0) $r(\phi) = 0$

(R_1) $r(X) \leqslant r(X + x) \leqslant r(X) + 1$

(R_2) $r(X + x) = r(X + x') = r(X) \Rightarrow r(X + x + x') = r(X)$

On notera (E, r) un matroïde sur E de fonction rang r.

Si $\mathscr{M}$ est un matroïde sur E et $X \subset E$, le *sous-matroïde* associé à X a pour parties indépendantes les éléments de $\mathscr{M}$ contenus dans X. Le *dual* $\mathscr{M}^*$ de $\mathscr{M}$ est le matroïde dont les bases sont les compléments dans E des bases de $\mathscr{M}$. La fonction rang r^* de $\mathscr{M}^*$ est reliée à la fonction rang r de $\mathscr{M}$ par

$$r^*(X) = |X| + r(E - X) - r(E).$$

GRAPHES, COUPLAGES. Un *graphe* est un couple (E, U), où E est l'ensemble des *sommets* et $U \subset E \times E$ est l'ensemble des *arcs*. Nous supposerons toujours les graphes sans boucle, c'est-à-dire $(x, x) \notin U$ pour tout $x \in E$.

Un *graphe biparti* (E, U, F) est un graphe dont l'ensemble des sommets est l'union de deux ensembles disjoints E et F et tel que $U \subset E \times F$. Soit (E, U) un graphe. Un *chemin simple* de ce graphe est une suite $P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ de sommets tous distincts tels que $k \geqslant 0$ et si $k > 0$ $(x_{i-1}, x_i) \in U$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. k est la longueur de P (par suite si $k = 0$, (x_0) est un chemin simple, et il est de longueur zéro) x_0 est le *sommet initial* ou *origine* de P et x_k son *sommet terminal* ou *extremité*.

Un *couplage* C d'un graphe biparti (E, U, F) est un ensemble d'arcs deux à deux sans sommet commun. Si $C \subset X \times Y$, on dit que C est un couplage de X vers Y.

Un *couplage généralisé* d'un graphe (E, U) est un ensemble de chemins simples, de longueurs $\leqslant 1$ deux à deux sans sommet commun.

Soit (E, U) un graphe. On lui associe le graphe biparti (E, U', E'), où E' est une copie (disjointe) de E (à tout $x \in E$ on associe sa "copie" $x' \in E'$) et où U' est défini par

$$(x, y') \in U' \Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad (x, y) \in U$$

Les couplages généralisés de (E, U) sont alors naturellement en correspondance biunivoque avec les couplages de (E, U', E').

MATRICES. Soient E et F deux ensembles. Si $x \in E$ nous dirons que $x \times F$ est une *ligne* du produit cartésien $E \times F$. De même si $y \in F$, $E \times y$ est une *colonne* de $E \times F$.

Une *matrice* à éléments dans un anneau $\mathscr{A}$ est une application ${}^EA_F$: $E \times F \to \mathscr{A}$, où E et F sont deux ensembles. Si $X \subset E$ et $Y \subset F$, la restriction de ${}^EA_F$ à $X \times Y$ sera notée ${}^XA_Y$ et sera appelée une *sous-matrice* de ${}^EA_F$. Si $x \in E$ et $y \in F$, ${}^xA_y$ sera confondu avec ${}^EA_F(x, y)$. (Il faut noter que nous ne supposons pas que $E \cap F = \varnothing$). Si $x \in E$, ${}^xA_F$ sera une *ligne* de ${}^EA_F$ et si $y \in F$, ${}^EA_y$ sera une *colonne* de ${}^EA_F$. Si $\mathscr{A}$ est un anneau unitaire, nous noterons ${}^EI_E$ la matrice unité définie par

$${}^xI_y = 0 \quad \text{si} \quad x \neq y \quad \text{et} \quad {}^xI_x = 1$$

Et nous noterons ${}^{E}O_F$ la matrice sur $E \times F$ à éléments tous nuls. Une matrice inversible sera dite aussi *régulière* et si ${}^{E}A_F$ est carrée ($|E| = |F|$) son déterminant sera noté det ${}^{E}A_F$.

2. Tabloïdes

DÉFINITION 2.1. Un *tabloïde* est un triplet (E, f, F) où E et F sont deux ensembles, et f une application de $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$ vers N qui est un rang par rapport à chacune de ses deux variables. L'application f s'appelle le *birang* (ou le *rang*, quand aucune confusion n'est à craindre) du tabloïde.

Le birang f associe donc à tout couple (X, Y), où $X \subset E$ et $Y \subset F$, un nombre entier naturel $f(X, Y)$ que nous appelerons le birang (ou même le le rang) de $X \times Y$. Dire que f est un rang en chacune de ses variables signifie que, X étant fixé inclus dans E, l'application qui à toute partie Y de F associe le nombre $f(X, Y)$ est un rang sur F, et symétriquement, Y étant fixé, l'application qui à toute partie X de E fait correspondre le nombre $f(X, Y)$ est un rang sur E.

Premières propriétés. Un certain nombre de propriétés des tabloïdes (et de leurs rangs) se déduisent de la définition et des propriétés des matroïdes. Ce sont celles qu'on obtient en écrivant par exemple les propriétés des rangs sur chacun des deux arguments (croissance, sous-modularité...).

Soit (E, f, F) un tabloïde; à chaque partie X de E est associé un matroïde sur F de fonction rang $Y \mapsto f(X, Y)$ et que nous noterons ${}^{X}\mathscr{F}$. Symétriquement, à chaque partie Y de F est associé un matroïde sur E de fonction rang $X \mapsto f(X, Y)$ que nous noterons $\mathscr{F}_Y$. Ainsi

$$Y \in {}^{X}\mathscr{F} \Leftrightarrow f(X, Y) = |Y|$$

et

$$X \in \mathscr{F}_Y \Leftrightarrow f(X, Y) = |X|$$

On est donc en présence, sur chacun des deux ensembles E et F, d'une double famille de matroïdes, chacune étant indicée sur les parties de l'autre ensemble. On a

$$X \subset X' \Rightarrow {}^{X}\mathscr{F} \subset {}^{X'}\mathscr{F}$$

car $f(X, Y) \leqslant f(X', Y) \leqslant |Y|$ et de même

$$Y \subset Y' \Rightarrow \mathscr{F}_Y \subset \mathscr{F}_{Y'}$$

Donc si X est dépendant dans $\mathscr{F}_{Y'}$ il l'est dans $\mathscr{F}_Y$ si $Y \subset Y'$. Remarquons que $f(X, Y) \leqslant \min\{|X|, |Y|\}$ et

$$f(X + x, Y + y) - f(X, Y) \leqslant 2.$$

Exemples de tabloïdes.

Matrice. Soit ${}^{E}A_{F}$ une matrice à éléments dans un corps. Pour tout $X \subset E$ et $Y \subset F$, si on nomme $f(X, Y)$ le rang (au sens de l'algèbre linéaire) de la sous-matrice ${}^{X}A_{Y}$, alors (E, f, F) est un tabloïde.

Couplages. Soit (E, U, F) un graphe biparti d'ensemble d'arcs $U \subset E \times F$. On sait [4] que l'ensemble des parties Y de F qui sont couplées à une partie fixée X de E par les arcs du graphe forme l'ensemble des parties indépendantes d'un matroïde sur F (qui dépend donc de X). De même l'ensemble des parties X de E qui sont couplées à une partie Y fixée de F forme l'ensemble des parties indépendantes d'un matroïde sur E (qui dépend de Y). On est donc en présence d'une double famille de matroïdes, et à l'aide de ceci on peut montrer que en posant: $f(X, Y) =$ cardinal maximal d'un couplage de X vers Y, on définit un tabloïde (E, f, F) que nous appelerons le *tabloïde de couplage* du graphe biparti.

On peut naturellement utiliser ceci pour définir le tabloïde associé aux couplages généralisés d'un graphe (E, U) à l'aide du tabloïde associé aux couplages du graphe biparti (E, U', E') associé à (E, U). Ce sera le tabloïde (E, f, E) où $f(X, Y) =$ cardinal maximal d'un couplage généralisé de X vers Y.

Gammoïdes. Soit (E, U) un graphe. On sait [9] que l'ensemble des parties Y de E, dont tous les éléments sont extrémités d'une famille de chemins simples deux à deux sans sommet commun et dont les origines sont les sommets d'une partie fixée X de E forme l'ensemble des parties indépendantes d'un matroïde sur E (appelé gammoïde). De même l'ensemble des parties X de E dont tous les sommets sont origines d'une famille de chemins simples deux à deux sans sommet commun et d'extrémités les éléments d'une partie Y de E fixée forme l'ensemble des parties indépendantes d'un matroïde sur E. Et ceci explique le fait que la fonction f définie par

$f(X, Y) =$ cardinal maximal d'un ensemble de chemins deux à deux sans sommet commun allant de X à Y, définit un tabloïde (E, f, F) que nous appelerons *tabloïde associé aux chemins du graphe.*

Tabloïdes associés aux matroïdes. Soient (E, r) et (F, r') deux matroïdes, en posant $f(X, Y) = \min\{r(X), r'(Y)\}$, on définit un tabloïde (E, f, F), les deux familles $({}^{X}\mathscr{F})_{X \subset E}$ et $(\mathscr{F}_{Y})_{Y \subset F}$ sont les "tronquées" des ensembles de parties indépendantes de (E, r) et (F, r'). Comme cas particulier on peut prendre F tel que $|F| \geqslant r(E)$ et r': $Y \mapsto |Y|$. On obtient alors $f(X, Y) = \min\{r(X), |Y|\}$ et le matroïde $\mathscr{F}_{F}$ n'est autre que (E, r). Une autre façon de construire un tabloïde (E, f, E) associé à (E, r) consiste à poser $f(X, Y) = |X \cap Y|$. La double famille de matroïdes correspondants est "à peu près" deux fois la famille de tous les sous-matroïdes de (E, r): en effet ${}^X\mathscr{F}$ (matroïde sur E) est l'ensemble des parties indépendantes du sous-matroïde de (E, r) associé à X (matroïde sur X).

Autres définitions et propriétés.

Sous-tabloïde. On définit un sous-tabloïde par analogie avec une sous-matrice: soit (E, f, F) un tabloïde et $X \subset E$ et $Y \subset F$. Alors la restriction de f à $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$ sera, par définition, la fonction birang du sous-tabloïde relatif à X et Y que nous noterons (X, f, Y).

Si $x \in E$, nous dirons que le sous-tabloïde (x, f, F) est une ligne (nous avons renoncé au mot lignoïde!) de (E, f, F) et de même si $y \in F$ nous dirons que (E, f, y) est une colonne (et non colonnoïde).

L'ensemble des lignes (resp. colonnes) de (E, f, F) est en bijection naturelle avec l'ensemble des lignes (resp. colonnes) de $E \times F$ et aussi avec E (resp. F). Il nous arrivera de confondre ces ensembles, une fois la fonction f fixée. Comme sur E est défini un matroïde $\mathscr{F}_E$, nous dirons qu'un ensemble de lignes du tabloïde est indépendant si le sous-ensemble correspondant l'est dans $\mathscr{F}_F$ et même, s'il n'y a pas d'ambiguité possible, que l'ensemble des lignes de $E \times F$ correspondant est indépendant.

FORMAT. Le *format* du tabloïde (E, f, F) est le couple d'entiers $(|E|, |F|)$. Si $|E| = |F|$ on dira que le tabloïde est *carré.*

TABLOÏDES RÉGULIERS, SINGULIERS. Un tabloïde (E, f, F) est dit *régulier* si on a $f(E, F) = |E| = |F|$ (il est donc carré). Il est dit *singulier* s'il est carré et non régulier. Le couple de sous-ensembles (X, Y) où $X \subset E$ et $Y \subset F$ est dit régulier (singulier) si le sous-tabloïde (X, f, Y) est régulier (resp. singulier.)

PROPOSITION 2.2. *Soit (E, f, F) un tabloïde, on peut trouver $X_0 \subset E$ et $Y_0 \subset F$ tel que (X_0, f, Y_0) soit régulier et de même rang que (E, f, F): il suffit de choisir $X_0 \subset E$ base de $\mathscr{F}_F$ puis $Y_0 \subset F$ base de ${}^{X_0}\mathscr{F}$.*

AXIOMATIQUE DES COUPLES RÉGULIERS. Tout comme un matroïde peut, entre autres, être défini par sa fonction rang ou par l'ensemble de ses parties indépendantes, on peut définir un tabloïde comme nous l'avons fait par sa fonction rang ou par l'ensemble de ses couples réguliers.

PROPOSITION 2.3. *Soient E et F deux ensembles et $\mathscr{R}$ un ensemble non vide de couples (X, Y) où $X \subset E$ et $Y \subset F$. $\mathscr{R}$ est l'ensemble des couples réguliers d'un tabloïde si et seulement si il vérifie les axiomes suivants:*

(C$_1$) *si* $(X, Y) \in \mathscr{R}$ *alors* $|X| = |Y|$

(C$_2$) *si* $(X, Y) \in \mathscr{R}$ *alors*

(i) *pour tout* $X_0 \subset X$, *il existe* $Y_0 \subset Y$ *tel que* $(X_0, Y_0) \in \mathscr{R}$

(ii) *pour tout* $Y_0 \subset Y$, *il existe* $X_0 \subset X$ *tel que* $(X_0, Y_0) \in \mathscr{R}$

(C$_3$) *si* $(X, Y) \in \mathscr{R}$ *et* $(X', Y') \in \mathscr{R}$ *avec* $|X'| = |X| + 1$, *alors il existe* $x' \in X' - X$ *et* $y' \in Y' - Y$ *tel que* $(X + x', Y + y') \in \mathscr{R}$.

Preuve. Si $\mathscr{R}$ est l'ensemble des couples réguliers du tabloïde (E, f, F) alors (C$_1$) est trivialement vérifié et (C$_2$) découle de la fin du paragraphe précédent. Montrons (C$_3$): si (X, Y) et $(X', Y') \in \mathscr{R}$ avec $|X'| = |X| + 1$, alors $f(X, Y) = |X| = f(X, Y \cup Y')$ donc $X \in \mathscr{F}_{Y \cup Y'}$ et de même $X' \in \mathscr{F}_{Y \cup Y'}$. Par suite en appliquant L_2 (cf. 1.1) à $\mathscr{F}_{Y \cup Y'}$, il existe $x' \in X' - X$ tel que $X + x' \in \mathscr{F}_{Y \cup Y'}$ c'est-à-dire $f(X + x', Y \cup Y') = |X| + 1$. Enfin $f(X, Y) = f(X + x', Y)$ donc $Y \in {}^{X+x'}\mathscr{F}$ qui est de rang $|Y| + 1$. Donc en complétant Y jusqu'à une base de ${}^{X+x'}\mathscr{F}$ on peut trouver $y' \in Y' - y$ tel que $Y + y' \in {}^{X+x'}\mathscr{F}$ c'est-à-dire

$$f(X + x', Y + y') = |X| + 1 \quad \text{d'où (C}_3\text{).}$$

Réciproquement, si $\mathscr{R}$ est un ensemble de couples de $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$ vérifiant (C$_1$), (C$_2$) et (C$_3$), alors en posant

$$f(X, Y) = \max\{|U|;\ U \subset X \text{ et } \exists V \subset Y \text{ tel que } (U, V) \in \mathscr{R}\}$$

on définit un tabloïde (E, f, F). En effet, si par exemple $Y \subset F$ est fixé, l'ensemble des parties $U \subset E$ telles qu'il existe $V \subset Y$ avec $(U, V) \in \mathscr{R}$ est un matroïde sur E de fonction rang $X \mapsto f(X, Y)$.

Remarque. Les tabloïdes sont en quelque sorte une abstraction des matrices où on n'a gardé que le "tableau" $E \times F$ et la fonction rang. Les sous-tabloïdes réguliers correspondent à la notion de sous-matrice à déterminant non nul, c'est-à-dire régulières.

TRANSPOSE, SYMÉTRIQUE, SOMME DIRECTE. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde. Le tabloïde *transposé* ${}^t\alpha$ est défini par ${}^t\alpha = (F, {}^tf, E)$ où ${}^tf(Y, X) = f(X, Y)$. Si $\alpha = {}^t\alpha$ on dira que α est *symétrique* (alors $E = F$ et f est elle même symétrique).

Si $\alpha_1 = (E_1, f_1, F_1)$ et $\alpha_2 = (E_2, f_2, F_2)$ sont deux tabloïdes tels que: $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, alors on définit le tabloïde $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ qu'on appelle *somme directe* de α_1 et α_2 par

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (E_1 \cup E_2, f_1 \oplus f_2, F_1 \cup F_2)$$

où

$$f_1 \oplus f_2 \colon (X, Y) \to f_1(X \cap E_1, Y \cap F_1) + f_2(X \cap E_2, Y \cap F_2)$$

ADVERSE. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde régulier (c'est-à-dire tel que $|E| = |F| = f(E, F)$) et $\mathscr{R}$ l'ensemble de ses couples réguliers. Soit $\tilde{\mathscr{R}}$ l'ensemble des couples de parties $Y \subset F$ et $X \subset E$ tel que

$$(Y, X) \in \tilde{\mathscr{R}} \Leftrightarrow (E - X, F - Y) \in \tilde{\mathscr{R}}$$

Nous allons montrer que $\tilde{\mathscr{R}}$ est l'ensemble des couples réguliers d'un tabloïde $\tilde{\alpha} = (F, \tilde{f}, E)$ que nous appelerons l'*adverse* de α. Ceci nécessite d'abord deux petits lemmes:

LEMME 2.4. *Si $(U, V) \in \mathscr{R}$, pour tout $x \subset U$, il existe $y \in V$ tel que $(U - x, V - y) \in \mathscr{R}$.*

En effet $(U - x) \times V$ est alors de rang $|U| - 1$, et il suffit de prendre pour $V - y$ une base de ses colonnes.

LEMME 2.5. *Si $(U, V) \in \mathscr{R}$ et $(U', V') \in \mathscr{R}$ avec $|U'| = |U| - 1$, alors il existe $u \in U - U'$ et $v \in V - V'$ tel que $(U - u, V - v) \in \mathscr{R}$.*

Preuve. Supposons que ceci soit faux et soient (U, V) et (U', V') ne satisfaisant pas ce lemme et tels que $|U \cap U'|$ soit maximal. D'après le dernier axiome des couples réguliers, on peut choisir $x \in U - U'$ et $y \in V - V'$ tel que $(U' + x, V' + y) \in \mathscr{R}$. Si $U' \not\subset U$, soit $x' \in U' - U$, on sait (2.4.) que l'on peut alors trouver $y' \in V' + y$ tel que $(U' + x - x', V' + y - y') \in \mathscr{R}$. Or $|(U' + x - x') \cap U| > |U' \cap U|$, donc il existe $u \in U - (U' + x - x')$ et $v \in V - (V' + y - y')$ tel que $(U - u, V - v) \in \mathscr{R}$. Or $u \in U'$ et $v \in V - V'$ donc il y a contradiction. Si $U' \subset U$, alors $V \cap V'$ est indépendant dans $U' \times V$ en tant que sous-ensemble de colonnes de $U' \times V'$. On peut alors le compléter dans $U' \times V$ (qui est de rang $|U'|$). Il restera v.

THÉORÈME 2.6. *$\tilde{\mathscr{R}}$ est l'ensemble des couples réguliers d'un tabloïde.*

$\tilde{\mathscr{R}}$ est non vide car $(F, E) \in \tilde{\mathscr{R}}$. L'axiome C_1 est trivialement vérifié. Montrons que C_2 l'est: soit $(Y, X) \in \tilde{\mathscr{R}}$ et $X_0 \subset X$. Alors $E - X_0 \supset E - X$, or $(E - X, F - Y) \in \mathscr{R}$ donc les colonnes de $(E - X_0) \times (F - Y)$ sont indépendantes. On peut donc les compléter jusqu'à une base V de colonnes de $(E - X_0) \times F$. Comme $(E, F) \in \mathscr{R}$, $(E - X_0) \times F$ a pour rang $|E - X_0|$ et par suite $|V| = |E - X_0|$. Il suffit alors de poser $Y_0 = F - V$ pour que $(E - X_0, F - Y_0) \in \mathscr{R}$ donc que $(Y_0, X_0) \in \tilde{\mathscr{R}}$.

Montrons que C_3 est vérifié. Soit $(Y, X) \in \tilde{\mathscr{R}}$ et $(Y', X') \in \tilde{\mathscr{R}}$ avec $|X'| = |X| + 1$. Alors $(E - X, F - Y) \in \mathscr{R}$ et $(E - X', F - Y') \in \mathscr{R}$ avec $|E - X'| = |E - X| - 1$. On sait alors (lemme 2.5) qu'on peut trouver $x \in (E - X) - (E - X')$ et $y \in (F - Y) - (F - Y')$ tels que $(E - X - x, F - Y - y) \in \mathscr{R}$. Par suite on a trouvé $x \in X' - X$ et $y \in Y' - Y$ tel que $(Y + y, X + x) \in \tilde{\mathscr{R}}$.

Autres propriétés de l'adverse. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde régulier de format (n, n) et $\tilde{\alpha} = (F, \tilde{f}, E)$ son adverse. La fonction $\tilde{f}$ est reliée à la fonction f par

$$\tilde{f}(Y, X) = |X| + |Y| + f(E - X, F - Y) - n$$

Il suffit de vérifier que cette fonction est un birang et que

$$\tilde{f}(Y, X) = |X| = |Y| \Leftrightarrow f(E - X, F - Y) = n - |X| = n - |Y|.$$

Soit X fixé inclus dans E, α définit sur F un matroïde ${}^X\mathscr{F}$(cf. 2.2) et $\tilde{\alpha}$ un matroïde sur ${}^F\mathscr{F}_{E-X}$. En utilisant la relation entre le rang d'un matroïde et celui de son dual, on voit que $\tilde{\mathscr{F}}_{E-X} = ({}^X\mathscr{F})^*$ de même ${}^{F-Y}\tilde{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}_Y)^*$

3. Transmission

Exemples. Nous savons, qu'étant donné un graphe biparti (E, U, F) et un matroïde $\mathscr{M}$ sur E, l'ensemble des parties de F qui sont couplées à une partie de E appartenant à $\mathscr{M}$ forme l'ensemble des parties indépendantes d'un matroïde sur F (cf. [6]). On peut dire que les graphes bipartis possèdent la propriété de "transmettre" les matroïdes par leurs couplages.

De même, les graphes quelconque "transmettent" les matroïdes grâce à leurs ensembles de chemins simples deux à deux sans sommet commun (cf. [7]).

Nous allons généraliser cela à un tabloïde quelconque.

Définition 3.1. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde et $\mathscr{M}$ un matroïde sur E. Nous dirons que α transmet $\mathscr{M}$ si l'ensemble $\mathscr{N}$ des parties Y de F vérifiant $f(X, Y) = |Y|$ pour au moins un $X \in \mathscr{M}$ est un matroïde sur F.

Si α transmet tous les matroïdes sur E, on dira plus simplement qu'il "*transmet*" ou qu'il est *transmetteur*.

Si $\alpha = (E, f, F)$ transmet le matroïde $\mathscr{M}$, alors si $Y \subset F$ le rang de Y dans $\mathscr{N}$, matroïde transmis, est le nombre

$$\max\{|Y_0|;\ Y_0 \subset Y \text{ et } f(X, Y_0) = |Y_0| \text{ pour un } X \in \mathscr{M}\}$$

c'est-à-dire

$$\max\{f(X, Y) \mid X \in \mathscr{M}\}$$

Remarques.

(i) Le rang de F dans le matroïde transmis est donc toujours inférieur ou égal au rang de E dans le matroïde de départ.

(ii) Dire que α transmet $\mathscr{M}$ signifie que $\mathscr{N} = \bigcup_{X \in \mathscr{M}} {}^X\mathscr{F}$ est un matroïde sur F.

DÉFINITION 3.2. Le tabloïde α *cotransmet* si son transposé ${}^t\alpha$ (cf. 2.4.4) transmet. Le tabloïde α *bitransmet* si il transmet et cotransmet. On le dira alors *bitransmetteur*.

THÉORÈME 3.3. *Le tabloïde associé à une matrice sur un corps* (2.1) *est bitransmetteur.*

Preuve. Soit ${}^EA_F$ une matrice à éléments dans un corps et $\mathscr{M}$ un matroïde sur E. Il suffit de montrer que $\mathscr{M}$ est transmis par (E, f, F) où f est la fonction rang de la matrice (la bitransmission s'obtient par transposition). Soit donc $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties Y de F telles que $f(X, Y) = |Y|$ pour au moins un $X \in \mathscr{M}$. L'axiome (L_1) est trivialement vérifié. Montrons que (L_2) l'est: Soient Y et $Y' \in \mathscr{N}$ tels que $|Y'| = |Y| + 1$. D'après la définition de $\mathscr{N}$ on peut trouver X et $X' \in \mathscr{M}$ tels que $f(X, Y) = |Y|$ et $f(X', Y') = |Y'|$. On sait (Prop. 2.2) qu'on peut choisir X et X' tels que $|X| = |Y|$ et $|X'| = |Y'|$. Cela signifie que les sous-matrices ${}^XA_Y$ et ${}^{X'}A_{Y'}$ sont régulières. Supposons X et X' ainsi choisis de sorte que $|X \cap X'|$ soit maximal. D'après l'axiome (L_2) appliqué à X et $X' \in \mathscr{M}$, on peut trouver $x' \in X' - X$ tel que $X + x' \in \mathscr{M}$. Supposons $X \not\subset X'$, si on prend un élément $x \in X - X'$ la matrice ${}^{X+x'-x}A_Y$ n'est pas régulière, sinon cela contredirait la maximalité de $|X \cap X'|$. Donc la ligne ${}^{x'}A_Y$ est combinaison linéaire des lignes de ${}^{X' \cap X}A_Y$ (sinon on pourrait compléter les lignes de ${}^{X \cap X'+x}A_Y$ dans celles de ${}^XA_Y$ jusqu'à une matrice ${}^{X+x'-x}A_Y$ régulière). D'autre part, la ligne ${}^{x'}A_{Y'}$ n'est pas combinaison linéaire des lignes de ${}^{X' \cap X}A_{Y'}$ (car la matrice ${}^{X'}A_{Y'}$ est régulière). On peut donc soustraire de la ligne ${}^{x'}A_{Y \cup Y'}$ une combinaison linéaire des lignes de ${}^{X \cap X'}A_{Y \cup Y'}$ pour remplacer cette ligne ${}^{x'}A_{Y \cup Y'}$ par une ligne contenant des zéros dans la partie ${}^{x'}A_Y$ et au moins un élément non nul sur une colonne y', où $y' \in Y' - Y$. Cette opération remplace la matrice ${}^{X+x'}A_{Y+y'}$ par une matrice qui a même rang et qui est régulière comme on le voit en développant son déterminant par rapport à la dernière ligne.

Dans le cas où $X \subset X'$, c'est-à-dire $X' = X + x$, on sait qu'on peut trouver $y' \in Y' - Y$ tel que la matrice ${}^{X+x'}A_{Y+y'}$ soit régulière: il suffit de compléter l'ensemble linéairement indépendant de colonnes de ${}^{X+x'}A_Y$ dans celui de ${}^{X'}A_{Y'}$.

Remarques 3.4.

(i) L'ensemble des couples réguliers $\mathscr{R}$ d'un tabloïde $\alpha = (E, f, F)$ est une relation binaire de $\mathscr{P}(E)$ vers $\mathscr{P}(F)$. Dire que le matroïde $\mathscr{M}$ est transmis par α signifie que $\mathscr{R}(\mathscr{M})$ est un matroïde (où $\mathscr{R}(\mathscr{M})$ désigne comme habituellement, l'ensemble des Y tels qu'il existe un X vérifiant $(X, Y) \in \mathscr{R}$).

(ii) La démonstration du théorème 3.3 ne fait intervenir que la propriété suivante du tabloïde associé à ${}^EA_F$:

Si $(X, Y) \in \mathscr{R}$ *et* $(X', Y') \in \mathscr{R}$ *avec* $|X'| = |X| + 1$, *alors, pour tout* $x' \in X' - X$ *tel que* $f(x', Y) = 0$, *il existe* $y' \in Y' - Y$ *tel que* $(X + x', Y + y') \in \mathscr{R}$.

Cette propriété est donc suffisante pour qu'un tabloïde transmette. On énoncerait facilement la propriété analogue correspondant à la cotransmission.

(iii) Une propriété plus forte que celle de la remarque précédente est la suivante:

$$f(X+x,\ Y+y) = f(X+x,\ Y) \Rightarrow f(X,\ Y+y) = f(X,\ Y)$$

sa symétrique:

$$f(X+x,\ Y+y) = f(X,\ Y+y) \Rightarrow f(X+x,\ Y) = f(X,\ Y)$$

Il est facile de voir que si cette propriété est vérifiée, on a la propriété de la remarque ii) donc la propriété de bitransmission. Cette nouvelle propriété ne fait rien d'autre que de généraliser la proposition: si, dans une matrice une colonne y (resp. une ligne x) est combinaison d'un ensemble de colonnes Y (resp. de lignes X) alors ceci reste vrai si on retire des lignes (resp. de colonnes) à la matrice. On peut enfin signaler que cette nouvelle propriété n'est équivalente ni à la bitransmission, ni au fait d'être un tabloïde de matrice (cf. ex. donné au § 5).

4. Produit de Tabloïdes

Définition 4.1. Soient $\alpha = (E, f, F)$ et $\beta = (F, g, G)$ deux tabloïdes. Pour tout $X \subset E$ et $Z \subset G$ nous posons

$$h(X, Z) = \max\{|\ Y\ |; f(X,\ Y) = |\ Y\ | = g(Y, Z)\}$$

En général (E, h, G) n'est pas un tabloïde. Cependant si β transmet, alors, si X est fixé inclus dans E, l'ensemble des Y tels que $f(X, Y) = |\ Y\ |$ est l'ensemble ${}^{X}\mathscr{T}$ qui est un matroïde et donc est transmis par β. Soit $r(Z)$ le rang de Z dans ce transmis. On a:

$$r(Z) = \max\{g(Y, Z) \mid Y \in {}^{X}\mathscr{T}\} = \max\{g(Y, Z) \mid f(X,\ Y) = |\ Y\ |\}$$

Si ce maximum est atteint pour Y_0, on peut trouver $Y_1 \subset Y_0$ avec

$$g(Y_0, Z) = |\ Y_1\ | = g(Y_1, Z) \quad \text{et} \quad f(X_1, Y_1) = |\ Y_1\ |$$

On a donc $r(Z) = |\ Y_1\ | \leqslant h(X, Z)$. Inversement il est clair que $r(Z) \geqslant h(X, Z)$. Par suite si le deuxième tabloïde transmet, h est un rang par rapport à son deuxième argument. On voit de même que si α cotransmet, alors h est un rang par rapport à son premier argument. En particulier si α et β sont bitransmetteurs, h est un birang et nous appelerons alors le tabloïde (E, h, G) le produit $\alpha \cdot \beta$.

THÉORÈME 4.2. *Le produit de deux tabloïdes bitransmetteurs est un tabloïde bitransmetteur.*

Preuve. Soient $\alpha = (E, f, F)$ et $\beta = (F, g, G)$ deux tabloïdes bitransmetteurs et $\alpha \cdot \beta = (E, h, G)$ leur produit.

Soit $\mathscr{M}$ un matroïde sur E. Si $h(X, Z) = |Z|$ pour un $X \in \mathscr{M}$, alors il existe $Y \subset F$ tel que

$$f(X, Y) = |Y| = g(Y, Z) = |Z|.$$

Donc Y est une partie indépendante du transmis de $\mathscr{M}$ par α et Z une partie indépendante du transmis de ce transmis par β.

Réciproquement si Z est une partie indépendante du transmis par β du matroïde transmis par α de $\mathscr{M}$, on a

$$g(Y, Z) = |Z| \quad \text{pour un } Y \text{ tel que} \quad f(X, Y) = |Y| \quad \text{pour un } X \in \mathscr{M}.$$

On sait alors (prop. 2.2) qu'il existe $Y_0 \subset Y$ tel que

$$|Y_0| = g(Y_0, Z) = |Z| \qquad \text{et} \qquad f(X, Y_0) = |Y_0|$$

donc $h(X, Z) = |Z|$ pour un $X \in \mathscr{M}$. De même on montrerait que $\alpha \cdot \beta$ cotransmet (on pourrait d'ailleurs utiliser l'égalité ${}^t(\alpha \cdot \beta) = {}^t\beta \cdot {}^t\alpha$).

PROPOSITION 4.3. *Le produit de tabloïdes bitransmetteurs est associatif.*

Soient $\alpha = (E, f, F)$, $\beta = (F, g, G)$ et $\gamma = (G, h, H)$ trois tabloïdes bitransmetteurs. L'associativité traduit le fait que les deux nombres:

$$\max\{|Z|; \max\{|Y|; f(X, Y) = |Y| = g(Y, Z)\} = |Z| = h(Z, T)\}$$

et $\max\{|Y|; f(X, Y) = |Y| = \max\{|Z|; g(Y, Z) = |Z| = h(Z, T)\}$ sont égaux, leur valeur étant la valeur maximale de la valeur commune des expressions

$$f(X, Y) = |Y| = g(Y, Z) = |Z| = h(Z, T)$$

Remarques sur le produit.

(i) La définition du produit de tabloïdes est clairement inspirée de celle du produit de matrices.

(ii) Soient $\alpha = (E, f, F)$ et $\beta = (F, g, G)$ deux tabloïdes et soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ leurs ensembles respectifs de couples réguliers. Il est facile de voir que la définition donnée pour le produit est un simple cas particulier de la définition du produit des relations binaires: soit $\mathscr{T} = \mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ produit au sens de la composition des relations binaires $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, c'est-à-dire $(X, Z) \in \mathscr{T} \Leftrightarrow$ il existe Y tel que $(X, Y) \in \mathscr{R}$ et $(Y, Z) \in \mathscr{S}$. Alors $\mathscr{T}$ est l'ensemble des couples réguliers de $\alpha \cdot \beta$, quand ce produit est un tabloïde. Avec ce point de vue on peut reprendre les démonstrations du paragraphe 4 (l'associativité en particulier est évidente)

5. Representation Matricielle des Tabloïdes

Définition 5.1. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde, on dira qu'il est *matriciellement représentable sur le corps* $\mathbb{K}$ si il existe une matrice ${}^E A_F$ à éléments dans $\mathbb{K}$, telle que pour tout $X \subset E$ et $Y \subset F$ on ait:

$$\text{rang } {}^X A_Y = f(X, Y)$$

${}^E A_F$ est une *représentation matricielle* de (E, f, F) sur $\mathbb{K}$ (définition équivalente: (X, Y) régulier (resp. singulier) dans $\alpha \Leftrightarrow \det {}^X A_Y \neq 0$ (resp. $= 0$)).

Le théorème 3.3 montre qu'une condition nécessaire pour qu'un tabloïde soit matriciellement représentable sur un corps et qu'il soit bitransmetteur. Cette condition n'est cependant pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant:

$$E = F = \{a, b\} \qquad \text{et} \qquad f(a, a) = f(b, b) = 1$$
$$f(a, b) = f(b, a) = 0 \, f(E, E) = 1$$

Si ce tabloïde était représentable sur un corps, alors la matrice représentative serait diagonale et on devrait avoir $f(E, E) = 2$. Il est cependant bitransmetteur (on le voit facilement en faisant tous les essais, ou encore en remarquant qu'il vérifie la propriété de la remarque 3.4 et sa transposée, qui sont donc plus faibles que la représentabilité sur un corps).

COUPLAGES DES GRAPHES BIPARTIS. On sait [8] que le tabloïde associé aux couplages d'un graphe biparti est représentable matriciellement sur un corps. En particulier, si (E, U, F) est un graphe biparti et $\mathbb{K}$ un corps, en associant à chaque arc $(x, y) \in U$ une indéterminée Z_{xy}, les Z_{xy} étant algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}$, on peut représenter le tabloïde des couplages du graphe biparti par la matrice ${}^E A_F$ définie par

$$\begin{cases} {}^x A_y = Z_{xy} & \text{si} \quad (x, y) \in U \\ {}^x A_y = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est une représentation dans le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$ en les Z_{xy}.

Si (E, U) est maintenant un graphe quelconque, on représentera de façon analogue le tabloïde associé à ses couplages généralisés par la matrice ${}^{E}A_{E}$ obtenue en posant

$$
{}^{x}A_{y} = Z_{xy} \quad \text{si} \quad (x, y) \in U \quad \text{et} \quad x \neq y
$$
$$
{}^{x}A_{x} = 1 \quad \text{et} \quad {}^{x}A_{y} = 0 \quad \text{dans les autres cas.}
$$

Il est facile de voir que l'indépendance algébrique des Z_{xy} a pour conséquence: si X, $Y \subset E$ avec $|X| = |Y|$

det ${}^{X}A_{Y} \neq 0 \Leftrightarrow$ il existe un couplage généralisé d'origines les éléments de X et d'extremités les éléments de Y. Nous remarquerons que cette matrice ${}^{E}A_{E}$ est inversible (et représente le tabloïde des couplages du graphe biparti associé à (E, U): c'est le cas précédent avec $Z_{xx'} = 1$).

Adverse. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde régulier représentable sur un corps $\mathbb{K}$ par la matrice ${}^{E}A_{F}$. Montrons que $\tilde{\alpha}$, l'adverse de α est représentable par la sentable par la matrice ${}^{F}B_{E}$ inverse de ${}^{E}A_{F}$:

Soit (Y, X) un couple régulier de $\tilde{\alpha}$. En écrivant que ${}^{E}A_{F} \cdot {}^{F}B_{E} = {}^{E}I_{F}$ et en effectuant le produit par blocs on a:

$$
\begin{cases}
{}^{E-X}A_{Y} \cdot {}^{Y}B_{X} + {}^{E-X}A_{F-Y} \cdot {}^{F-Y}B_{X} = {}^{E-X}O_{X} \\
{}^{X}A_{Y} \cdot {}^{Y}B_{X} + {}^{X}A_{F-Y} \cdot {}^{F-B}B_{X} = {}^{X}I_{X}
\end{cases}
$$

Donc, en appelant ${}^{F-Y}C_{E-X}$ la matrice inverse de ${}^{E-X}A_{F-Y}$ (qui existe car par définition de $\tilde{\alpha}$, $(E - X, F - Y)$ est régulier dans α)

$$
({}^{X}A_{Y} - {}^{X}A_{F-Y} \cdot {}^{F-Y}C_{E-X} \cdot {}^{E-X}A_{Y})\, {}^{Y}B_{X} = {}^{X}I_{X}
$$

Ce qui prouve que ${}^{Y}B_{X}$ est inversible, donc que ${}^{F}B_{E}$ représente bien $\tilde{\alpha}$.

Gammoïdes. Soit (E, U) un graphe et $\mathbb{K}$ un corps. Associons au graphe la matrice ${}^{E}A_{E}$ représentant le tabloïde des couplages généralisés c'est-à-dire

$$
{}^{x}A_{x} = 1,\ {}^{x}A_{y} = Z_{xy} \quad \text{si } (x, y) \in U \quad \text{et} \quad x \neq y \quad \text{et} \quad {}^{x}A_{y} = 0
$$

sinon les Z_{xy} étant des indéterminées sur $\mathbb{K}$ algébriquement indépendants. D'après le "*lemme fondamental*" de Ingleton et Piff [5] (lemme 3.1). Nous savons que si X et $Y \subset E$ on a l'équivalence entre les propositions suivantes:

(1) il existe un ensemble des chemins simples, deux à deux sans sommet commun, d'origines les éléments de X et d'extrémités ceux de Y.

(2) Y est couplé à X' dans le graphe biparti associé, c'est-à-dire ${}^{E-Y}A_{E-X}$ est une matrice régulière.

Soit alors ${}^{E}B_{E}$ la matrice inverse de ${}^{E}A_{E}$, en utilisant la représentation de l'adverse nous savons qu'il est aussi équivalent de dire que la matrice ${}^{X}B_{Y}$

est régulière, c'est-à-dire en définitive que le tabloïde (E, f, E) associé aux chemins du graphe (E, U) est représenté par la matrice ${}^{E}A_{E}$, "matrice d'incidence généralisée".

6. Problème Général de la Representation Matricielle d'un Tabloïde

Définition 6.1. Soit $\mathscr{A}$ un anneau et $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde. On dira que α est représenté matriciellement sur $\mathscr{A}$ par la matrice ${}^{E}M_{F}$ si, pour tout couple (X, Y) singulier de α, on a $\det {}^{X}M_{Y} = 0$.

La matrice ${}^{E}M_{F}$ est appelée une représentation matricielle de α sur $\mathscr{A}$ Il faut bien remarquer que cette nouvelle notion de représentation sur un anneau est beaucoup plus faible que celle donnée précédemment (dans le cas où $\mathscr{A}$ est un corps). Une telle représentation sur un anneau est en général "mauvaise" car il n'y a pas équivalence entre (X, Y) singulier et $\det {}^{X}M_{Y} = 0$.

Représentation matricielle universelle. Soient E et F deux ensembles, et $\mathbb{Z}[E \times F]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers dont les indéterminées sont les couples d'éléments (x, y) pour $x \in E$ et $y \in F$, supposées indépendantes algébriquement sur $\mathbb{Z}$.

Le produit cartésien $E \times F$ peut alors être considéré comme une matrice ${}^{E}(E \times F)_{F}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[E \times F]$ (en posant naturellement ${}^{x}(E \times F)_{y} = (x, y)$). Soit maintenant $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde et $\mathscr{A}$ un anneau. Si α est représenté sur $\mathscr{A}$ par la matrice ${}^{E}M_{F}$, la propriété universelle de $\mathbb{Z}[E \times F]$ nous permet d'étendre de façon unique l'application ${}^{E}M_{F} : E \times F \to \mathscr{A}$ en un morphisme d'anneaux $M \colon \mathbb{Z}[E \times F] \to \mathscr{A}$.

Soit I_f l'idéal de $\mathbb{Z}[E \times F]$ engendré par tous les polynnmes $\det({}^{X}(E \times F)_{Y})$ pour tous les couples (X, Y) singuliers de α. Nous appelerons $\mathscr{A}_f$ l'anneau quotient $\mathbb{Z}[E \times F]/I_f$ et $\pi \colon \mathbb{Z}[E \times F] \to \mathscr{A}_f$ la projection canonique.

Proposition 6.2. *L'anneau $\mathscr{A}_f$ est universel relativement aux représentations matricielles de α sur un anneau, c'est-à-dire que: pour toute représentation matricielle ${}^{E}M_{F}$ de α sur un anneau $\mathscr{A}$, il existe un morphisme d'anneaux unique φ tel que le diagramme soit commutatif:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[E \times F] \arrow[rr, "M"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{A} \\ & \mathscr{A}_f \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve. ${}^{E}M_{F}$ est une représentation de α, donc $I_f \subset \ker M$.

Remarques. L'ensemble des polynômes $\det^X(E \times F)_Y$ pour les couples (X, Y) singuliers de α n'est en général pas un ensemble générateur minimal de I_f. En particulier si (X, Y) est singulier et si $U \subset X$ est tel que tous les couples (U, V) pour tous les $V \subset Y$ et $|V| = |U|$ sont singuliers, alors, en vertu de la formule de Laplace pour le développement d'un déterminant, $\det^X(E \times F)_Y$ est dans l'idéal engendré par les polynômes $\det^U(E \times F)_V$. Or, si (X, Y) est singulier X est dépendant dans $\mathscr{F}_Y$ et Y l'est dans ${}^X\mathscr{F}$. La situation précédente se produit si X n'est pas un stigme de $\mathscr{F}_Y$. Il suffit donc, pour engendrer I_f, de prendre les polynômes $\det^X(E \times F)_Y$ où X est un stigme de $\mathscr{F}_Y$ et Y un stigme de ${}^X\mathscr{F}$, c'est-à-dire $f(X, Y) = |X| - 1$ et $(X - x, Y - y)$ régulier pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$. Seuls sont donc à considérer les couples singuliers "minimaux".

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tabloïde soit représentable sur un corps. Nous nous inspirerons largement ici de la méthode due à VAMOS [11] pour les matroïdes. Soit $\alpha = (E, f, F)$ un tabloïde et T l'ensemble de tous les produits de tous les polynômes $\det^X(E \times F)_Y$ pour tous les couples (X, Y) réguliers de α.

THÉORÈME 6.3. *α est représentable sur un corps si $T \cap I_f = \varnothing$.*

Preuve. Si α est représentable matriciellement sur le corps $\mathbb{K}$ par ${}^EM_F$, Ker M est un idéal premier de $\mathbb{Z}[E \times F]$. Donc comme tout polynôme $\det^X(E \times F)_Y$, où (X, Y) est un couple régulier de α, a une image non nulle par M, $M(T)$ ne contient pas 0 et par suite $T \cap \operatorname{Ker} M = \varnothing$ et, puisque $I_f \subset \operatorname{Ker} M$

$$T \cap I_f = \varnothing$$

Réciproquement, si $T \cap I_f = \varnothing$, un idéal maximal P de $\mathbb{Z}[E \times F]$ vérifiant $T \cap P = \varnothing$ et $I_f \subset P$ est un idéal premier car T est fermé pour le produit. Soit alors $\mathbb{K}$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}[E \times F]/P$ et p la projection canonique associée $p\colon \mathbb{Z}[E \times F] \to \mathbb{K}$. La restriction de p à $E \times F$ est une représentation de α.

Remarque. En suivant toujours [11], on peut, en posant $Q = \Pi \det^X(E \times F)_Y$ (X, Y) regulier traduire la proposition précédente par:

THÉORÈME 6.4. *α est représentable matriciellement sur un corps ssi Q n'est pas dans le nilradical de I_f.*

Preuve. Si $T \cap I_f = \varnothing$, comme $Q^n \in T$ pour tout n Q n'est pas dans le nilradical de I_f.

Inversement, si $P \in T$, P divise Q^n pour un n, donc si Q n'est pas dans le nilradical de I_f, alors $P \notin I_f$ donc $T \cap I_f = \varnothing$.

Remarque sur la représentation des matroïdes.

Soit $\mathscr{M}$ un matroïde sur un ensemble E de fonction rang r. Soit $n = r(E)$ et $[n] = \{1, 2,..., n\}$. Considérons le tabloïde $t = (E, f, [n])$ défini par

$$f(X, J) = \min\{r(X), |J|\} \qquad \text{où} \qquad X \subset E \qquad \text{et} \qquad J \subset [n]$$

Ce tabloïde possède la propriété suivante.

$X \in \mathscr{M} \Leftrightarrow$ pour tout $J \subset [n]$ tel que $|J| = |X|$, le couple (X, J) est régulier dans t.

Nous dirons que t est le tabloïde standard associé à $\mathscr{M}$.

PROPOSITION 6.5. *Un matroïde est représentable sur un corps ssi le tabloïde standard associé est matriciellement représentable sur un corps.*

Preuve. Dans un sens, c'est trivial.

Si $\mathscr{M}$ est représentable sur le corps $\mathbb{K}$ par une matrice ${}^{E}A_{[n]}$ telle que $X \in \mathscr{M} \Leftrightarrow$ les lignes de ${}^{X}A_{[n]}$ sont linéairement indépendantes.

Soient Z_{ij}, $i, j \in [n]$ des indéterminées indépendantes sur $\mathbb{K}$ et ${}^{[n]}Z_{[n]}$ la matrice telle que ${}^{i}Z_{j} = Z_{ij}$. Soit

$${}^{E}M_{[n]} = {}^{E}A_{[n]}{}^{[n]}Z_{[n]}$$

${}^{E}M_{[n]}$ est une matrice à éléments dans l'extension de $\mathbb{K}$ par les Z_{ij}. D'après ce qu'on sait sur le déterminant d'un produit de matrice on a

$$\det {}^{X}M_{J} = \sum_{I \subset [n]} \det {}^{X}A_{I} \cdot \det {}^{I}Z_{J}$$

donc, en vertu de l'indépendance des Z_{ij}, $\det {}^{X}M_{J}$ est nul si et seulement si tous les $\det {}^{X}A_{I}$ sont nuls.

${}^{E}M_{[n]}$ est donc une représentation matricielle de t.

REFERENCES

1. C. P. BRUTER, "Élements de théorie des matroïdes."
2. J. CHASTENET DE GERY, "Cours d'algèbre matricielle du Conservatoire National des Arts et Métiers," Ed. Scientifiques Riber, Paris.
3. H. CRAPO AND C. ROTA, "Combinatorial Geometries," M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1970.
4. J. EDMONDS AND D. R. FULKERSON, Transversals and matroid partition, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B.* **69** (1965), 73–77.
5. A. W. INGLETON AND M. J. PIFF, Gammoids and transversal matroids, *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **15** (1973), 51–68.
6. M. LAS VERGNAS, "Théorême de Rado et extensions," Séminaire de combinatoire et théorie des graphes No. 8, Faculté des Sciences, January 21, 1970.

7. J. H. Mason, On a class of matroids arising from paths in graphs, *Proc. London Math. Soc. (3)* **25** (1972), 55–74.
8. L. Mirsky and H. Perfect, Application of the notion of independance to problems of combinatorial analysis, *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 327–387.
9. H. Perfect, Independence spaces and combinatorial problems, *Proc. London Math. Soc.* (*3*) **19** (1969), 17–30.
10. J. S. Pym, A proof of linkage theorem, *J. Math. Anal. Appl.* (*3*) **27** (1969), 636–638.
11. P. Vamos, "A necessary and sufficient condition for a matroid to be linear," Exposé Rencontre Franco-Britanique sur la théorie des matroïdes, Brest, May 1970.
12. N. L. White, "The Bracket Ring and Combinatorial Geometry," Thesis, Harvard University, 1971.
13. H. Whitney, On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.* **57** (1935), 509–533.